

ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК

I КУРС (II СЕМЕСТР) 2023/2024

ТЕМА 1. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.

1. Критичні точки. Необхідна умова наявності локального екстремуму (з доведенням). Приклад, що ця умова не є достатньою. Достатні умови наявності (відсутності) локального екстремуму функції в термінах першої похідної. Достатні умови наявності (відсутності) локального екстремуму функції в термінах вищих похідних. (все з доведенням)
2. Означення (строго) опуклих та угнутих функцій на проміжку. Геометричне тлумачення опуклості та угнутості. Означення точки перегину графіка функції. Необхідна умова в точці перегину для двічі диференційовних функцій. Достатні умови строгої опуклості функції та наявності (відсутності) точки перегину.
3. Асимптоти графіка функції. Теорема про знаходження похилих асимптот (з доведенням).
4. Повна схема дослідження функції та побудова її графіка з детальним поясненням та формулюванням відповідних теорем, означень). Приклад.
5. Формула Тейлора для поліномів (з доведенням). Означення полінома Тейлора для функції, що n разів диференційовна в точці. Локальна формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано.
6. Локальна формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа (в формі Пеано). Формули Маклорена для деяких елементарних функцій (e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, з доведенням)

ТЕМА 2. ІНТЕГРУВАННЯ.

Тема 2.1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.

1. Означення первісної функції на проміжку. Теорема про структуру множини первісних функцій на проміжку (з доведенням). Приклад функції на проміжку, в якій не існує первісної на цьому проміжку. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця первісних деяких елементарних функцій. Формула заміни змінної та формула інтегрування частинами для невизначеного інтегралу.
2. Раціональні функції (дроби), розкладення їх на найпростіші. Інтегрування найпростіших раціональних функцій.
3. Інтегрування функцій за допомогою підстановок Ейлера.
4. Деякі властивості парних і непарних раціональних функцій і їх використання при інтегруванні раціональних функцій відносно синуса та косинуса. Універсальна тригонометрична підстановка. Інтегрування добутку раціональних степенів синуса та косинуса. Інтегрування функцій, раціональних відносно експонент.

Тема 2.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.

1. Розбиття відрізка та набори точок, узгоджені з даним розбиттям. Означення інтегральних сум Рімана, інтеграла Рімана та класу інтегрованих за Ріманом функцій. Геометричний зміст.
2. Адитивність інтеграла Рімана як функції відрізка (з доведенням). Лінійність інтеграла Рімана відносно підінтегральної функції (з доведенням). Оцінка модуля інтеграла. Збереження знака інтеграла Рімана (з доведенням, наслідок з доведенням). Теорема про середнє (значення) для інтеграла Рімана (з доведенням).
3. Основна формула інтегрального числення (формула Ньютона-Лейбніца з доведенням) та її наслідок про відновлення функції за її похідною через інтеграл Рімана. Формула інтегрування частинами для інтеграла Рімана, теорема про заміну змінної в інтегралі Рімана.
4. Визначення криволінійної трапеції та знаходження її площі (з доведенням).. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтегралу (з доведенням). Випадок фігури, що обмежена лініями, які задано параметрично.
5. Обчислення площі криволінійного сектора (з доведенням).
6. Довжина кривої. Теорема про обчислення довжини кривої (з доведенням). Наслідки.
7. Обчислення об'єму тіла, яке здобуто обертанням графіка функції навколо вісі Ox/Oy (з доведенням).

Тема 2.3. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ.

1. Означення невластного інтеграла по необмеженому проміжку (інтеграла 1-го роду), його збіжність. Еталонний інтеграл 1-го роду, його збіжність. Критерій Коші збіжності невластного інтеграла по

- необмеженому проміжку. Критерій збіжності невласного інтеграла від невід'ємної функції (з доведенням). Ознака порівняння збіжності невласних інтегралів і її наслідки (з доведенням). Приклад.
2. Означення абсолютної та умовної збіжностей невласних інтегралів 1-го роду. Зв'язок збіжностей невласних інтегралів від функції та від модуля функції (з доведенням). Ознаки Діріхле та Абеля збіжності невласного інтеграла 1-го роду (з доведенням). Приклади.
 3. Означення невласного інтеграла від необмеженої функції (інтеграла 2-го роду), його збіжність. Еталонний інтеграл 2-го роду, його збіжність (з доведенням). Критерій Коші збіжності невласного інтеграла від необмеженої функції.
 4. Властивості невласних інтегралів (лінійність невласних інтегралів відносно підінтегральної функції; адитивність невласного інтеграла як функції проміжку з доведенням). Формули заміни змінної та інтегрування частинами для невласних інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца для невласних інтегралів. Головне значення невласного інтеграла.

ТЕМА 3. РЯДИ.

Тема 3.1. ЧИСЛОВІ РЯДИ.

1. Означення ряду, його часткових сум і збіжності ряду. Найпростіші властивості числових рядів. Критерій Коші збіжності числових рядів. Необхідна умова збіжності числового ряду (з доведенням). Гармонійний ряд (з доведенням). Сума нескінченної геометричної прогресії.
2. Ряди з невід'ємними членами, ознаки їх збіжності (ознака порівняння (з доведенням) та її наслідки, ознака Даламбера (з доведенням), інтегральна ознака Коші). Приклади.
3. Ряди з чергуванням знаків і лейбніцевські ряди. Ознака Лейбніца (з доведенням) збіжності рядів і її наслідок. Абсолютна та умовна збіжності рядів. Зв'язок збіжності ряду зі збіжністю ряду, складеного з модулів членів вихідного ряду. Ознаки Абеля збіжності рядів. Приклади.

Тема 3.2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ.

1. Означення степеневих рядів. Формули для обчислення радіусу збіжності степеневих рядів (Даламбера з доведенням). Теорема про абсолютну збіжність степеневих рядів. Теорема Абеля.

ТЕМА 4. МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР $\mathbb{R}^n$: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

Тема 4.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

1. Означення метрики та метричного простору. Приклад $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Відкриті (замкнені) множини в $\mathbb{R}^n$ у метричному просторі $(\mathbb{R}^n, \rho)$, приклади. Властивості відкритих (замкнених) множин в $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Означення ε -околів та проколених ε -околів. Означення діаметра множини та обмеженої множини. Властивість віддільності точок у метричному просторі. Граничні точки множин. Означення ізольованих, внутрішніх, зовнішніх і межових точок множин у метричних просторах. Замикання множин, компакти у просторі $\mathbb{R}^n$.
2. Означення границі функції кількох змінних за Коші та за Гейне. Границя функції по множині. Означення неперервності функцій кількох змінних. Теорема Вейерштрасса. Приклад функції двох змінних, для якої не існує всебічної границі, але існує границя за будь-яким напрямком.
3. Означення диференційовності в точці функції кількох змінних, диференціала та похідної функції в точці. Необхідна умова диференційовності функції (зв'язок між неперервністю та диференційовністю функції в точці з доведенням). Означення частинних похідних функцій в точці та теорема про зв'язок диференційовності функції в точці з диференційовністю в цій точці за окремими змінними. Достатня умова диференційовності функції в точці. Означення неперервної диференційовності відображення та її зв'язок з неперервністю частинних похідних координатних функцій. Геометричне тлумачення диференційовності функції двох змінних (в тому числі рівняння дотичних та нормальних площин до графіку функції (з доведенням формул), тлумачення диференціалу).
4. Похідна функції за напрямком (з доведенням формули). Теорема про існування похідних за всіма напрямками для диференційовної у внутрішній точці функції та зв'язок похідної за напрямком з градієнтом функції. Геометричний зміст градієнта функції. Ортогональність градієнта функції в точці до лінії рівня, що проходить через цю точку.
5. Частинні похідні функції m -порядку в точці. Необхідні (достатні) умови m разів диференційовності функції в точці.

6. Теорема Шварца про рівність змішаних похідних другого порядку. Зв'язок диференціалів функції з частинними похідними. Диференціали вищих порядків для функції багатьох змінних, їх неінваріантність..

Тема 4.2. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

1. Означення локальних екстремумів (строгих та нестрогих) функцій кількох змінних. Необхідна умова внутрішнього екстремуму диференційовної функції (з доведенням), наслідок. Достатня умова наявності локального внутрішнього екстремуму в стаціонарній точці двічі диференційовної функції двох змінних.
2. Означення умовного екстремуму функції кількох змінних. Метод невизначених множників Лагранжа. Приклад знаходження умовного екстремуму за означенням та за методом Лагранжа.
3. Глобальні екстремуми функції у замкнутій області. Навести приклад.
4. Метод найменших квадратів.

ТЕМА 5. МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР $\mathbb{R}^n$: ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

Тема 5.1. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.

1. Задача про об'єм циліндроїда. Подвійний інтеграл по довільній обмеженій множині. Означення інтегровної за Ріманом функції на довільній обмеженій множині. Необхідна умова інтегровності за Ріманом (з доведенням).
2. Властивості подвійного інтегралу (адитивність подвійного інтеграла Рімана як функції множини, лінійність подвійного інтеграла відносно підінтегральної функції двох змінних, інтегровність добутку та модуля інтегровних функцій, оцінка модуля інтеграла, позитивність та монотонність подвійного інтеграла, теорема про середнє (значення) для подвійного інтеграла).
3. Теорема про обчислення подвійних інтегралів від інтегровної на криволінійній трапеції функції за допомогою повторних. Приклад обчислення подвійного інтеграла за допомогою цієї теореми.
4. Заміна змінних в подвійних інтегралах. Полярна система координат.
5. Застосування подвійних інтегралів в механіці.

Тема 5.2. ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.

1. Властивості потрійного інтегралу. Обчислення потрійних інтегралів за допомогою повторних (з доведенням).
2. Заміна змінних в потрійних інтегралах. Сферичні та циліндричні координати, знаходження об'єму.
3. Застосування потрійних інтегралів у механіці.

ТЕМА 6.

1. Інтеграл Ейлера-Пуасона.

ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧЕНИХ ЗАВДАНЬ. ЧАСТИНА 1.

ТЕМА 1.

1. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
2. Дослідити функцію на опуклість. $f(x) = \ln(1+x^2)$
3. Дослідити функцію та побудувати графік: $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x-1}$.
4. Розкласти поліном $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ у ряд Тейлора по ступеням $(x+1)$.
5. Розкласти функцію $f(x) = \arcsin x$ в ряд Маклорена до $\bar{o}(x^3)$; $f(x) = \frac{2}{2-x}$, в ряд Маклорена до $\bar{o}(x^n)$
6. Розкласти функцію $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора до $\bar{o}((x-x_0)^n)$, $x_0 = 4$; $f(x) = \frac{x}{x-1}$ до $\bar{o}((x-x_0)^3)$, $x_0 = 2$

ТЕМА 2.

7. Обчислити невизначені інтеграли: (в усіх завданнях вказати метод інтегрування)

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+2\ln x}}{x} dx \quad \int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x} dx \quad \int \frac{dx}{3+\cos x} \quad \int x^2 e^{-x} dx.$$

8. Обчислити визначені/невласні інтеграли: (в усіх завданнях вказати метод інтегрування, тип невластного інтеграла)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx; \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx, \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$$

9. Обчислити площу фігури, що відокремлена лініями $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.
10. Обчислити довжину астроїди.
11. Обчислити об'єм фігури обертання, яку отримано обертанням лінії $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = -2$ навколо осі Oy .
12. Обчислити площу бокової поверхні тіла, що утворено обертанням фігури, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = 0$, навколо осі Ox .

ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧЕНИХ ЗАВДАНЬ. ЧАСТИНА 2

ТЕМА 3.

13. Перевірити необхідну умову збіжності ряду та знайти суму ряду $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$
14. Дослідити збіжності рядів
 $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$; $\frac{21}{3} + \frac{41}{9} + \frac{61}{27} + \dots$; $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots$
15. Дослідити збіжність ряду: $\frac{1}{x \cdot (x+1)} + \frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)} + \frac{1}{(x+2) \cdot (x+3)} + \dots$
16. Визначити інтервали збіжності; дослідити збіжність на границях інтервалу збіжності:
 $1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$; $\frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{3 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{5 \cdot 2^3} + \dots$
17. Обчислити $\sin 12^\circ$ з похибкою $\varepsilon < 0,001$.

ТЕМА 4.

18. Записати повний диференціал функції: $f(x, y) = (4 + 3x^2 - 2y)^2 + y^2 \sin \frac{x}{3} + e^{xy}$.
19. Записати повний диференціал другого порядку функції: $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$.
20. Обчислити частинні похідні функції: $e^{xz} - xyz = 5$
21. Обчислити частинні похідні складеної функції: $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$; $y = 3u - 2v$.
22. Обчислити повну похідну функції $z = \ln(e^x + e^y)$, $y = x^3$.
23. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні σ $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в у точці $M_0(1, 2, -1)$.
24. Знайти похідну функції $u = x^2 y^2 z^2$ у точці $M_0(1, 2, 3)$ у напрямку вектору M_0B , де $B(0, 1, 1)$.
25. Обчислити умовний екстремум функції $z = f(x, y)$: $z = x + 2y$, при умові $x^2 + y^2 = 5$
26. Знайти екстремум функції $z = f(x, y)$: $z = 4(x - y) - y^2 - x^2$.
27. Обчислити градієнт функції $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ у точці $M_0(-1, 1, -1)$. Обчислити довжину вектору градієнта.

ТЕМА 5.

28. Обчислити $\iint_D \sin(x+y) dx dy$, D : $y = x$, $x = 0$, $y = \pi/2$;

29. Обчислити $\iint_D \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} ds$, D : $x^2 + y^2 \leq 1$

30. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями: $4z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 4x$.
31. Обчислити масу тіла, що обмежене поверхнями, і має щільність $\gamma = \gamma(x, y, z)$:
 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $\gamma = x^2 + y^2$

ТЕМА 6.

33. Обчислити:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+6x} dx. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2+2x} dx$$